ПРИЛОЖНА ЛОГИКА

МАРТИН ТАБАКОВ*

ОЩЕ ЗА ПАРАДОКСИТЕ ПРИ ИЗБОРИ

Abstract: Abstract: In Tabakov 2016, I gave a curious example of an unexpected result in the Hare-Nieheimer system: "A situation where, if a political party P increases its votes and the votes for other parties remain the same, the voting results of P will be worse. The number of its elected deputies will be smaller. The publication provoked interest, and the main questions that were put to me were the following:

- Is the example really original, cannot other examples be given?
- Are there other paradoxes related to electoral practices?
- Can some mathematical results (theorems) related to my example be given?
- Is it appropriate to call such surprising results "paradoxes"?

Here I discuss these four questions. I analyze some paradoxes of majority systems and prove a theorem that gives a sufficient condition for the non-monotony of the largest residue method in the case of a quotient less than 1.

I discuss whether a paradox can be interpreted as proof of the non-universality of some principle and the non-existence of an object. Hence, "do real paradoxes exist?". I propose the following criterion: "the more the principle refuted by the 'paradox' is important and necessary to a given theory, and the less successful are the attempts to develop the theory without using this principle, then the more justified it is to remove the quotation marks and consider it a true paradox".

Keywords: paradox; voting paradox; voting system; elections; intuition;

В Табаков 2016 показах любопитен пример на неочакван резултат при системата на Хеър-Ниимайер, който определих като „аритметичен психологически парадокс". Публикацията предизвика интерес, като основните въпроси, които се поставиха пред мен, бяха следните:

- Наистина ли примерът е оригинален, няма ли публикувани други, подобни примери?
- Има ли други, свързани с изборните практики, „парадокси"?
- Може ли да се дадат някакви математически резултати – теореми, свързани с примера ми?
- Уместно ли е да се наричат такива изненадващи резултати „парадокси"?

Тук ще обсъдя тези 4 въпроса.

1. Парадокси, свързани със системата на Хеър-Ниимайер за пропорционална избирателна система

1\. 1. „**Парадоксът Алабама**" – най известен пример за странни, неочаквани, резултати при системата на Хеър-Ниимайер е „Парадоксът Алабама"**:**

„Според Американската конституция разпределението на места в Конгреса се преизчислява всеки 10 години на основа на броя на население-

* Проф. дфн в ИИОЗ, БАН. Email: marmatab@gmail.com

то. След преброяването през 1880 г. чиновник на Бюрото за преброяване на населението в САЩ забелязал, че щатът Алабама ще получи осем места при общо 299, но при общо 300 ще получи само 7! Излиза, че при увеличаване на общия брой се намалява частта на един щат. Подобни резултати лесно се откриват. Например Бюрото за преброяване на населението в САЩ е забелязало, че след преброяването през 1900 г. при общ брой места между 350 и 400 щатът Колорадо би получил три места във всички случаи, с изключение на варианта с общо 357 места, при който би получил две.“

Счита се, че той е първият забелязан парадокс, свързан със системата на Хеър-Ниимайер за пропорционална избирателна система.

В (https://en.wikipedia.org/wiki/Apportionment_paradox) е даден пример за парадокса „Алабама“ при системата на Хеър-Ниимайер – с три щата.

При 10 места Щ1 и Щ2 получават по 4 места, а щат 5 – 2 места[1]:

Щат	Население	%	Частно	Места от цялото	Остатък	С най-голям остатък	Общо места
Щ1	60000	42.857	4.2857	4	.2857	**0**	**4**
Щ2	60000	42.857	4.2857	4	.2857	**0**	**4**
Щ3	20000	14.286	1.4286	1	.4286	**1**	**2**

Но при 11 места Щ1 и Щ2 получават по 5 места, а щат 5 – само 1 място!:

Щат	Население	%	Частно	Места от цялото	Остатък	С най-голям остатък	Общо места
Щ1	60000	42.857	4.714	4	4.714	**1**	**5**
Щ2	60000	42.857	4.714	4	4.714	**1**	**5**
Щ3	20000	14.286	1.572	1	1.572	**0**	**1**

Друг по близък до реалните числа, но пак малко опростен пример с четири щата, има в: *(https://ru.wikipedia.org/wiki/Парадокс_Алабамы).*

При 323 места резултатът е:

Щат	Население	%	Частно	Места от цялото	Остатък	С най-голям остатък	Общо места
Щ1	567000	56.70	183.141	183	.141	**0**	183
Щ2	385000	38.50	124.355	124	.355	**0**	124
Щ3	42000	4.20	13.566	13	.566	**1**	**14**
Щ4	6000	0.60	1.938	1	.938	**1**	2

Но при 324 места резултатът е:

Щат	Население	%	Частно	Места от цялото	Остатък	С най-голям остатък	Общо места
Щ1	567000	56.70	183.708	183	.708	**1**	**184**
Щ2	385000	38.50	124.74	124	.74	**1**	**125**
Щ3	42000	4.20	13.608	13	.608	**0**	**13**
Щ4	6000	0.60	1.944	1	.944	**1**	2

[1] Таблиците са направени по модела на от Табаков 2016. Примерите са моя редакция, като съм се старал в тях идеята да се вижда още по ясно – б.а., М. Т.

При увеличаването на броя на местата, Щ3 губи едно място за сметка на два по-големи щата. Сходно е било и при реалния пример в щата Алабама.

Ако заменим щат с партия, а „Население“ с гласове за тях, ще се получи парадоксален резултат – при увеличаването на местата в парламента с едно – партия 3 ще загуби едно място за сметка на две по-големи партии.

Аритметичната причина е, че при увеличаване на броя на местата, **частното** на по-големите щати (и аналогично партии) расте по-бързо, отколкото за малките. В случая частните на големите Щ1 и Щ2 се увеличават повече от това на малкия Щ3 и остатъците им надминават остатъка му. Т.е. математическите методи за определяне на местата в системата на Хеър-Ниимайер са такива, че облагодетелстват, макар и с най-много едно място) по-големите партии. (Подобно нещо, дори още по засилено, се наблюдава и ако се използва системата Д‘Онт, където по-големите партии са дори повече облагодетелствани! Това е и причината тя по-рядко да се използва.)

Подобно на „Парадоксът“ от Табаков 2016 и тук има нарушаване на монотонността, а тя е основен принцип на пропорционалната избирателна система. Разликата е че при „парадокса Алабама“ гласовете не се променят, а само броят на местата. Но много по изненадващо е, че е възможно, ако една партия си увеличи гласовете, резултатът ѝ да е загуба на място! Затова за мен **„Парадоксът“ от Табаков 2016 е значително по странен и затова – по „Парадоксален“ от „Парадоксът Алабама“.**

1. 1. 1. **Битов вариант на „Парадоксът Алабама“**

За да стане още по ясно, давам битов вариант на „Парадоксът Алабама“. Четири наемни работници (или студенти-бригадири при соца), са извършвали земеделска дейност. Като компенсация селската фирма (ТКЗС-то при соца) решава да компенсира труда им в натура – с яйца, пропорционално на изработеното, по системата на Хеър-Ниимайер! Оценяват общо извършената работа на 323 яйца. А изработеното в единици от тях е като в колоната население (явно двама са били по-работливи, а другите двама – НЕ).

При 323 яйца резултатът е:

Наемник	дейност	%	Частно	Места от цялото	остатък	С най-голям остатък	Общо места
Н1	567	56.70	183.14	183	.14	**0**	183
Н2	385	38.5	124.35	124	.36	**0**	124
Н3	42	4.20	13.56	13	.57	**1**	**14**
Н4	6	0.60	1.93	1	.94	**1**	2

Но при 324 места резултатът е:

Наемник	дейност	%	Частно	Места от цялото	остатък	С най-голям остатък	Общо места
Н1	567	56.70	183.71	183	.71	**1**	**184**
Н2	385	38.5	124.74	124	.74	**1**	**125**
Н3	42	4.20	13.61	13	.61	**0**	**13**
Н4	6	0.60	1.94	1	.94	**1**	2

Дават им едно яйце повече, пак ги разпределят пропорционално, а Н3 получава едно яйце по-малко! Е, забавно би било, ако протестът е инициирaн точно от него – често по-малко заслужаващите са по агресивни!

По-съобразителните вероятно са забелязали, че в основата на „Парадоксът Алабама“ стои това, че **в пропорционалната система се появява малък елемент от мажоритарна система, който торпилира монотонността**. А именно мажоритарният принцип – „победителят (в случая най-големият остатък, или при системата Д‘Онт – по-голямото частно) взима всичко. Ако вместо яйца даваха леща, боб, череши… измерени до грам… всичко щеше да си е в ред – най-много някой щеше да получи 1 грам повече, което не е съществено. Докато яйцата, както депутатските места, са **неделими**!

Тук един логик бе вметнал, че дълбоката причина за такива парадокси е използването на двузначна логика. И че колкото по-некласическа логика (в случая по-многозначна) се използва, толкова по-прецизна ще е системата! И това не е невъзможно – например би могло партиите да получават и дробно число депутати – просто последният класирал се депутат да има право на част от глас – според остатъка. Но не би се въвело – много, а и излишно биха се усложнили нещата!

1. 2. Парадокс на негласувалите– при пропорционална избирателна система негласуването на няколко души за една партия променя резултатите на други две (споменат е в блог, (https://www.cphpvb.net/fun/6624-elections-methods/, посочен ми от Проф. Д. Скордев, за което му благодаря, но не открих споменатия там източник). Тук давам пример по близък до **б**ългарската действителност.

За окръжен съвет от 13 места в малък град гласуват 11 100 души. Участват четири партии и нормално ще се получат следните резултати:

Партия	Гласове	%	Частно	Места от цялото	Остатък	най-голям остатък	Общо места
P1	4300	38.74	5.036	5	.036	**0**	5
P2	2900	26.13	3.3964	3	.3964	**0**	3
P3	2700	24.32	3.1622	3	.1622	**0**	3
P4	1200	10.81	1.4054	1	.4054	**1**	**2**

Партия P4 с най-голям остатък взима свободното място.

Но ако в последния момент 100 потенциални избиратели на P3 откажат да гласуват (лесно ще се конструират реалистични примери), какъв ще е резултатът? Нормалното е да се предположи, че ако нещо ще се промени, то е партия P3 да загуби място и друга да го получи. Но ето резултатът:

Партия	Гласове	%	Частно	Места от цялото	Остатък	най-голям остатък	Общо места
P1	4300	39.09	5.082	5	.082	**0**	5
P2	2900	26.36	3.427	3	.427	**1**	**4**
P3	**2600**	23.64	3.073	3	.073	**0**	3
P4	1200	10.91	1.418	1	.418	**0**	**1**

При 100 гласа по малко за P3 остатъкът на P4 стана по малък от този на P2. Намаляването на гласовете с на P3 с 3.7% не променя резултата ѝ, но променя резултатите на други 2 партии – P2 и P4! P2 печели едно място. Но неочаквано се взима не от P3, а от P4!

Този пример стои най-близо до дадения от Табаков 2016. Парадоксално е, но според мен не толкова както в моя пример, в който ако една партия P си увеличи гласовете – резултатът става по-лош за нея! Би бил аналогичен, ако намаляването на гласовете за партия P3 **увеличавах**а местата ѝ. Затова засега смятам, че примерът в Табаков 2016 е оригинален и нов по дух.

2. Други „парадокси“, свързани с изборните практики

Някои могат да се изненадат, но има доста свързани с изборните практики „парадокси“. Тук ще спомена само най-известните.

2. 1. **Парадокси на мажоритарните системи**

2. 1. 1**. Парадокси на Кондорсе**. По темата за избори и избирателни системи има не малко литература, но за „парадокси“ при тях основно се засягат теми**,** свързани с Жан-Антоан дьо Кондорсе. Например така наречените „Paradox of voting**”**, свързани с твърдението, че вот на отделен индивид е много малко вероятно да се отрази на резултата от изборите. И при милиони гласове реалистичната оценка за стратегията му**,** основана на егоистичният му интерес**,** би била, че енергията и времето, които той ще загуби**,** гласувайки**,** не заслужават евентуалните негови ползи при желан резултат. Това се отнася дори и за партийните функционери – въпреки че победата на неговата партия може да му донесе значителна лична изгода – назначаване на престижно, добре платено място – (да го оценим с 1000 единици полза). Но вероятността точно неговият глас да доведе до такава победа е много малка, например 0.0001. И математическо очакване от действието му е 1000*0.0001= 0.1 единици полза. Което едва ли надвишава цената на загубеното време. Темата, доразвита от А. Даунс понякога се нарича и *парадокс на Даунс*.

Най-често се обсъжда ***Парадоксът на Кондорсе,*** или „voting paradox“ – даващ парадоксално противоречие между няколко групи избиратели при повече от две алтернативи. Той засяга основно мажоритарни избирателни системи. Ето прост пример:

Нека X, Y и Z кандидатстват за нещо и решение взема жури от трима души, чиито предпочитания са:

Първи член на журито: 1 място X, 2 място Y, 3 място Z

Втори член на журито: 1 място Z, 2 място X, 3 място Y:

Трети член на журито: 1 място Y, 2 място Z, 3 място X.

Кой трябва да спечели? „Мажоритарно“ всички са равни. Нека се приложи следният „метод на Кондорсе“ – всеки член на журито подрежда кандидатите и ги сравнява по двойки. Печели този, който има най-много победи. Но при горната подредба за третия и втория член на журито Z е преди X, т.е. Z „бие“ X с 2-1. А за първия и втория член на журито X е преди Y, т.е. X „бие“ Y с 2-1 – така че **(Z>X>Y).** Но **няма транзитивност**,[2] защото за първия и третия член на журито Y е преди Z, т.е. Y „бие“ Z с 2-1.

Липсата на транзитивност сама по себе си не изглежда парадоксална – има немалко нетранзитивни релации. Но все пак всеки дава транзитивна подредба и не се предполага, че при резултатите няма транзитивност, а цикличност **(Z>X>Y>Z)! Комплекс от ясни оценки на всеки индивид води до парадоксално мнение на мнозинството от тях – мнозинство предпочита X над Y, мнозинство предпочита Y над Z и пак мнозинство – Z над X**. (Разбира се, обяснението е, че всяко от мнозинствата е съставено от различни групи индивиди.)

Основното е, че това опровергава един изглеждащ разумен метод (пак на Кондорсе) – „***мнението на болшинството може да се определи, като всеки подреди алтернативите***“. И после за всяка двойка се смята кой има повече преференции. И понеже всеки е дал транзитивна подредба, се очаква, че и резултатът ще е транзитивен.

Идеята на Кондорсе е била да се избегнат някои от недостатъците на мажоритарните системи – това че не е коректно **системата да определя победителя** (Това често за нарича „Закон на Дюверже“: „**Видът на избирателната система в една държава предопределя вида на партийната система там**“) А **при мажоритарната система в един тур и при мажоритарната система в два тура резултатите, при еднакви нагласи на избирателите, често не са еднакви!** И с метода си Кондорсе е целял да предложи една повече съответстваща на предпочитанията система.

Пример с МОК. За пример давам варианта на мажоритарна система при избор на домакин на олимпиада (при 3 кандидата такъв избор съвпада с избор при мажоритарна система в два тура).

Балотират се три града – А, В, С, и гласуват 108 членове на МОК (те са до 115), разделени по предпочитания на четири групи.

37 членове на МОК ги подреждат така: В>А>С,

31 членове на МОК ги подреждат така: С>В>А,

27 членове на МОК ги подреждат така: А>С>В,

и 13 членове на МОК ги подреждат така: А>В>С.

Така на 1-ви тур град А получава болшинство – 40 гласа. **И ако изборите са в един тур (както във Великобритания), А Печели!**

Но ако има два тура – град В получава 37 гласа и отива на балотаж, а град С получава 31 гласа и отпада.

За втори тур остават А и В. Тогава, ако пак гласуват същите 108 членове на МОК и са си запазили нагласите:

13-те членове на МОК, щом ги подреждат А>В, ще гласуват за А;

27-те членове на МОК, щом ги подреждат А>В, ще гласуват за А;

31 членове на МОК, щом ги подреждат В>А, ще гласуват за В;

и 37 членове на МОК, щом ги подреждат В>А, ще гласуват за В.

И ще е избран град В със внушително мнозинство от 68 гласа срещу 40 гласа за град А – **водачът** на 1-ви тур!

---

[2] Релация R е транзитивна когато $\forall$ x,y,z (xRy & yRx$\rightarrow$ xRz).

Лесно се вижда, че подобна ситуация може да се получи и при избор на председател на партия, председател на БАН, НС…! А като увеличим пропорционално числата – и на мажоритарни избори за депутат от район, за кмет/… дори за президент!

2. 1. 2. **Парадокс на Борда**. В подобна насока е и Парадокс на Борда, изложен през 1770 г. С долния пример той показва, че при мажоритарна система в един тур победителят може да не е най-желаният от мнозинството.

Има избор от три кандидата – A , B, C и 21-членно жури, имащи следните предпочитания:

Предпочитания	*Резултат*	Предпочитанията по двойки
7 от журито A>C>B; *7 от журито B>C>A;* *6 от журито C>B>A* *1 от журито A>B>C*	*8 гласа за A* *7 гласа за B* *6 гласа за C* ***победител е A***	*A>B – 8 гласа* *A>C – 8 гласа* *B>A – **13 гласа*** C>*A – **13 гласа***

При мажоритарна система в един тур ***победител е A*** с болшинство. **Но ако анализираме предпочитанията по двойки, се вижда, че победителят е най-нежеланият от тримата и B и C го бият и и то с 13 на 8 гласа!**

2. 1. 3. **Парадокс на Ароу**. Кенет Ароу е автор на теорема, която често се нарича и „парадокс“. Теоремата на Arrow обобщава парадокса на Condorcet и показва невъзможността един колективен избор да даде добре индивидуалните предпочитания на отделните индивиди. В частност и победителят в демократичните избори невинаги оптимално съответства на индивидуалните нагласи.

2. 2. **Тип логика при оценка на гласуването**

От гледна точка на логиката в подреждането има някакъв елемент на многозначност. Нека го засилим и прецизираме с тризначна логика, което може да се интерпретира така – не се гласува за един кандидат, а тризначно – и според традицията – стойностите са – **1, ½, 0** , съответно на поставените първи, втори, трети. Това изглежда по-справедливо. Но. Предвид очакваното нежелание да се работи с дроби, много вероятно е да се предложи да се гласува, като за първия се дават 3 точки, за втория – 2, за третия – 1. Тогава:

A ще получи (37*2) + (31*1) + (27*3) + (13*3) = 74+31+81+39=**225**;

Съответно B ще получи (37*3) + (31*2) + (27*1) + (13*2) = 111+62+27+26=**226;**

C ще получи (37*1) + (31*3) + (27*2) + (13*1) = 37+91+54+13 = **197**.

И ако изборите са в един тур (а предвид прецизната точкова система това е нормално) и за разлика от мажоритарната система за гласуване, при „многозначната“ гласуването пак е в един тур, печели B! Както би било и при мажоритарната система за гласуване в 2 тура.

Обща постановка е и че ползването на многозначна логика, освен че е по прецизно, води и до предимство на по умерените. Да вземем прост пример с три партии –(крайно) леви популисти – LP; (крайно) десни популисти – RP; по-разумни,умерени – MD. И се гласува за 240 места –както в България.

Нормално е да се очаква, че популистите са по-популярни – повечето хора се поддават на манипулации, мислят първосигнално, пък и харесват крайностите. Затова нека двете популистки партии да имат по около 40% популярност, докато „по-разумните, умерени“ – около 20%. Ако допуснем доста силната идеализация, че това разпределение на нагласите е относително равномерно във всички райони, какви ще са резултатите?

При мажоритарна система в един тур „по-разумните умерени“ едва ли ще спечелят и едно място – борбата навсякъде ще е между кандидатите на двете по-крайни партии. И те ще получат по около 120 депутата, като флуктуации ще определят коя от тях ще има мнозинство. Резултат – двупартийна система, със две крайни партии в парламента, една от партиите има малко мнозинство, другата – опозиция. А доколко управляващите често заработват негативи – на следващите избори нещата се повтарят, само че малкото мнозинство има другата „крайна“ партия. И ако държи на обещанията си – коренна промяна на политиката.

При мажоритарна система в два тура на втори тур почти навсякъде ще отидат кандидатите на двете по-крайни партии. И резултатът ще е подобен на този при мажоритарна система в един тур!

При пропорционална система резултатът ще е различен – двете крайни ще имат по 96 депутата, а „умерените“ – 48. И ще са балансьор – вероятно ще се коалират с по-разумната от „крайните“, съгласила се на повече отстъпки от крайните си позиции! Резултат – по-балансирана политика.

Но да приемем, че се въведе тризначно гласуване, като се дават 3, 2, 1 точки. Тогава може да се очаква, че симпатизантите на „крайните“ партии ще дадат на „своите“ 3 точки, а на другите „крайни“ – 1 точка, и за „умерените“ остава да дадат 2 т. „Умерените“, естествено, също ще дадат на „своите“ 3 точки, а на крайните – 2 т. или 1 т. , например по равно.

Партия	**LP**	**RP**	**MD**
LP– 40%	**120**	**40**	**80**
RP– 40%	**40**	**120**	**80**
MD– 20%	**30**	**30**	**60**
ALL-600т.	**190/6 %**	**190/6 %**	**220/6 %**
Депутати	**19*4 = 76**	**19*4 = 76**	**22*4 = 88**

Резултат – **най много депутати ще имат „умерените“- MD**!

3. Математически резултати – желателно би било да се посочат и такива, свързани с резултата от Табаков 2016 (За Парадокса на Кондорсе такива има. За примера от т. 2. 1. 1. е показано например, че ако процентът на тези, за които X е преди Y, е Xy, а процентът на тези, за които Y е преди Z, е Yz, то от Silver1992 лесно се извежда, че необходимо условие за парадокса е: Xy + Yz < 150.). Тук ще дам няколко, но все пак даващи насоки за техния характер – какви биха били те.

Ако бъде очистен от нематематически подробности, методът на най-големите остатъци би могъл да се опише по следния начин: дадена е някаква крайна редица от неотрицателни числа, на които сборът е цяло число, и ги преобразуваме в цели неотрицателни числа със същия сбор, като първо вземаме целите им части и след това, започвайки от онези от дадените числа, които имат най-голяма дробна част, добавяме 1 към съответната цяла част, докато сборът на преобразуваните числа се изравни със сбора на първоначално дадените (заб. в някои случаи това предписание може да се окаже изпълнимо по повече от един начин – напр. ако дадената редица е 0.5, 0.5). Примерът от Табаков 2016 (при разглеждане като дадени числата в първите пет реда на петата колонка) показва, че в случая на петчленна редица при запазване на сбора на дадените числа може да се случи някое от тях да бъде увеличено, а съответното му при преобразуването число да стане по-малко. Той има същественото предимство, че отговаря на ситуация, която би могла реално да възникне при избори.

Н**о** чисто математическите много други примери за такава немонотонност лесно могат да се конструират, дори и за по-къси, тричленни редици. Например редицата 0.5, 1.1, 0.4 се преобразува в 1, 1, 0, а редицата 0.6, 0.7, 0.7 – в 0, 1, 1.

Тук ще изложа едно достатъчно условие за немонотонност на метода на най-големите остатъци в случая на частни, по-малки от 1.

Теорема 1. Нека n и k са положителни цели числа, а $a_1, \ldots, a_n$ са неотрицателни числа, по-малки от 1, сборът на които е равен на k. Нека за дадено $m \in \{1, \ldots, n\}$ е в сила неравенството $a_m < k/k+1$,

Тогава съществуват такива неотрицателни числа $b_1, \ldots, b_n$, по-малки от 1 и имащи сбор k, че $b^m > a^m$ и числата $i \in \{1, \ldots, n\}$, за които $b_i > b_m$, са k на брой.

Доказателство. Почленното събиране на неравенствата

$a_1 < 1, \ldots, a_n < 1$ - дава, че $k < n$.

Нека x е число, удовлетворяващо неравенствата $a_m < x < k/k + 1$,

и нека I да бъде такова k-елементно подмножество на множеството

$\{1, \ldots, n\}$,че $\sim(m \in I)$.

При $i \in \{1, \ldots, n\}$ полагаме

$$\mathrm{b_i} = \begin{cases} x, & \text{ако } \mathrm{i = m}, \\ 1 - \frac{x}{k}, & \text{ако } \mathrm{i \in I}, \\ 0 \text{ в останалите случаи} & \end{cases}$$

Тъй като

$(1 - x/k) - x = ((k + 1)/k)*((k/k + 1) - x) > 0$, (понеже по дефиниция $x < k/k+1$)

така дефинираните числа $b_1, \ldots, b_n$ имат желаните свойства.

Основавайки се на Теорема 1, могат да се посочат примери за търсената немонотонност. Такива се получават, ако m принадлежи на такова k-елементно подмножество I_0 на множеството $\{1, \ldots, n\}$, че $a_i > a_j$ винаги,когато $i \in I_0$, $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus I_0$.

Забележка. Ако в предположението за a_m заменим знака < със знака ≥, то заключението на твърдението не може да бъде вярно. Действително, ако допуснем противното, то бихме имали такива неотрицателни числа $b_1, ..., b_n$ със сбор k, че $b_i > k/k + 1$

поне за $k + 1$ числа $i \in \{1, . . . , n\}$, а това е невъзможно.

Надявам се горният пример да даде начало на много други подобни резултати! Включително и много по важни.

4. Уместно ли е да се наричат подобни изненадващи резултати „парадокси“?

Най лесният отговор е, че след като подобни, дори и по-малко „парадоксални“ неща – „voting paradox“, „Paradox of voting”, „Парадокс на Кондорсе“, „парадокс на Даунс“, са се наложили, то и примерът от Табаков 2016 може да се нарече „парадокс“. Все пак ще се опитам да анализирам по задълбочено нещата.

4. 1**. Къде е противоречието**? Най общо под „Парадокс“ се разбира разсъждение, което изглежда логически вярно, но води до неочаквани или неприемливи за досегашното знание и **интуицията** изводи, а (понякога?) и до противоречиви твърдения. Безспорно в случая от Табаков 2016 съществува моментът „***неочаквано***“, дори **крайно неочаквано**! – **„партия P4 получава цели 7400 гласа повече, а губи депутатска бройка!“** Но все пак внимателно е категоризиран там като „*Психологически парадокс*“, или „*Парадокс на интуицията*“. Това е често срещана теза. Например в Nurmi 1999: 3 се казва: *Voting paradoxes typically involve something profoundly counterintuitive or inconsistent with the premises one is working on.*

По сложен е въпросът дали има противоречие с нещо друго освен с досегашната интуиция. Противоречие има и то е с някакъв принцип, постановка, която се е считала за разумна, приемлива, работеща, интуитивно вярна.

При *Paradox of voting* противоречието е с естествения принцип, нагласа, че гласуването е важно, особено ако политическата ситуация е сериозна и резултатите от изборите могат съществено да променят живота на индивида, още повече – ако е партиен функционер.

При парадокса на Кондорсе (и парадокса на Borda's) противоречието е с един изглеждащ напълно приемлив и разумен метод за намиране на *мнението на болшинството – всеки да подреди алтернативите*, и после, за всяка двойка, да се смята кой има повече преференции. И понеже всеки е дал транзитивна подредба, то е естествено да се очаква, че и резултатът ще е транзитивен. Но той не отговаря на интуитивното очакване, че „collectivities are analogous to persons in the sense of having opinions structured in the same manner as by individuals“ (Nurmi 1999: 3). При парадокса на Ароу противоречието е с очакването, че при един колективен избор винаги може да се отчетат личните предпочитания на индивидите.

Парадоксът „Алабама“ противоречи на *Принципа за справедливо разделение* – щом ресурсите за споделяне се увеличават, а принципите за разпределение са същите – тогава никой не трябва да губи от увеличаването.

„При парадоксите“, свързани с мажоритарните системи, противоречието е с естествения принцип, че **не бива системата да определя победителя**.

При „парадокса на негласувалите“ има противоречие с желания принцип, че намаляването на гласовете за една партия би трябвало да се отрази само на нейния резултат и така евентуално да увеличи резултата на друга/и партии. Но не би трябвало да **намалява** резултатът на друга (трета) партия!

При резултата от Табаков 2016 противоречието е с основната идея на пропорционалната система – „броят на избраните е пропорционален на гласовете“, от което следва, че ако имаш повече гласове, ще получиш същите или повече депутати! А също и противоречи с основно за пропорционалната система свойство – „монотонност“.

Колегата Р. Люцканов спомена и друго противоречие – възможността увеличаването на гласовете да намали резултата – това поставя активистите на партия Р4 в парадоксална ситуация – ако агитират и дори купят гласове, може резултатът да е негативен. Но в случая от Табаков 2016 това е възможно да се появи само при много рядко стечение на обстоятелствата! Но, вече имайки опит, доразвих тази идея, като модифицирах примера с МОК и получих напълно реален и много вероятен пример, при който активистите от град В са в наистина парадоксална ситуация.

4.2. **Парадокс на корумпираните членове на МОК**

При горните примери няма такъв драстично-парадоксален резултат като примера от Табаков 2016 – увеличаваш гласовете на ***една партия, а резултатът става по-лош за нея“*** . Но конструирах нещо близко по дух, като модифицирах примера от „Парадокса на Кондорсе“, даден в т. 1. 2., така че аналогично на този от Табаков 2016 да е парадоксален – ***увеличаваш гласовете на един град, а резултатът става по-лош за него“***:

Да допуснем, че 13-те членове на МОК, да кажем купени от град В (което, като е известно, се случва), променят гласа си на първи тур. И вместо за град А, гласуват за В!

Тогава В получава на първи тур 37+13=50 гласа; С получава същите 31, а А получава само 27 и отпада! **Остават само В и С**!

И ако членове на МОК са си запазили нагласите – тогава на втори тур:

13 (купени) членове на МОК ще гласуват за В;

27 членове на МОК, щом ги подреждат С>В, ще гласуват за С;

31 членове на МОК, които ги подреждат С>В, ще гласуват за С;

и 37 членове на МОК, щом ги подреждат В>С, ще гласуват за В.

И с 58 гласа ще е избран град С – срещу 50 гласа за град В.

Аналогията е видна **– (фаталните!) 13 членове на МОК увеличиха гласуването на първи тур за Град В, а в резултат той губи олимпиадата!**

Разбира се, този пример е далече от пропорционалната система и от метода на Хеър-Ниимайер.

4. 3**. Има ли „истински“ парадокси**? За всички споменати примери може да се възрази „да, неочаквани са, но дали са „истински“ парадокси? Не показват ли само, че принципите, на които противоречат, са неуниверсални или до-

ри погрешни? Но контравъпросът е: **„А *има ли „истински" парадокси?"*.** От същата гледна точка **един парадокс не може ли да се трактува като доказателство (чрез допускане на противното) за неуниверсалност на принцип или несъществуване на даден обект?!** Например парадоксът на Ръсел може да се трактува и като доказателство за неуниверсалност на „принципа за абстракцията"[3], и доказателство, че Ръселовото множество несъществува. Парадоксът на лъжеца може да се трактува и като доказателство, че „аз в момента лъжа" просто не е съждение…

По сходен начин един парадокс не може ли да се трактува и като „*Парадокс на интуицията*". Парадоксът на Ръсел може да се интерпретира, че интуицията ни, че за всяко свойство може да конструираме множеството от обектите, притежаващи това свойство, ни е подвела! Парадоксът на лъжеца – че интуицията ни всяко изглеждащо ясно изречение може да се интерпретира като съждение в класическото му разбиране, пак ни е подвела.

И тук опираме до следния критерий – ***колкото по-важен и необходим за една теория е принципът, който „парадоксът" опровергава*** (а също и в духа на Сава Петров – „колкото повече опитите теорията да се развива без него са неудачни"), ***толкова по-голямо е основанието да махнем кавичките и да го считаме за истински парадокс.***

ЛИТЕРАТУРА

Табаков, М. 2016. За един незабелязан досега парадокс в системата на Хеър-Ниимайер. // *Философски алтернативи*, бр. 6, 135–141.

Nurmi, H. 1999. Voting paradoxes and how to deal with them. // *ISpringer-Verlag*. Berlin, Heidelberg.

Silver, C. 1992. The voting paradox. // *The Mathematical Gazette,* 76, November, 387–388.

[3] Принцип на абстракцията е принцип на *наивната теория на множествата*, според който за всяко свойство (предикат) съществува множеството от обектите, притежаващи това свойство. Принципът на абстракцията е бил важен момент на Канторовата теория на множествата и на други, свързани с нея изследвания Парадоксът на Ръсел поставя под съмнение този, изглеждал естествен за математическата интуиция принцип.